Durée : 4 heures

N.B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...).*

EXERCICE I.-APPLICATION SIMPLE (4 pts)

Soit $\mathfrak{M}_3$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité de $\mathfrak{M}_3$.

1° On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, A^3 et A^4.

2° Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{M}_3 \\ x \longmapsto I + xA + \frac{x^2}{2} A^2 \end{array} \right.$

a. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

b. En déduire que, pour tout réel x,

$$f(x) \times f(-x) = f(-x) \times f(x) = I$$

puis que la matrice $I + xA + \frac{x^2}{2} A^2$ est inversible.

Exprimer l'inverse de cette matrice en fonction de x, I, A et A^2.

c. Application numérique :

Soit la matrice $B = I + 4A + 8A^2$.

Déterminer la matrice B^{-1} inverse de B.

La réponse à cette question sera donnée sous la forme :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

EXERCICE II.- CALCUL NUMERIQUE (4 pts)

A l'oral d'un examen, chaque candidat est interrogé en 1re langue où il obtient la note x et en 2e langue où il obtient la note y (notes sur 20).

Les résultats obtenus par les 100 candidats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

y \ x	[0 , 4[	[4 , 8[	[8 , 12[	[12 , 16[	[16 , 20]
[0 , 4[.....	2	5	2		
[4 , 8[.....	1	12	10	3	
[8 , 12[.....		3	28	12	1
[12 , 16[.....		1	5	10	2
[16 , 20]				1	2

Pour effectuer les calculs demandés :

* On supposera que chaque candidat a obtenu la note égale au centre de la classe correspondante;
* On utilisera IMPÉRATIVEMENT les variables :

$$u = \frac{x - 10}{4} \quad \text{et} \quad v = \frac{y - 10}{4}$$

1° Calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$ et l'écart type $\sigma(x)$ des notes obtenues en 1re langue.

Calculer la moyenne arithmétique $\bar{y}$ et l'écart type $\sigma(y)$ des notes obtenues en 2e langue.

2° Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les notes obtenues en 1re langue et en 2e langue.

.../...

PROBLEME (12 pts)

N.B. — *Dans la deuxième partie de ce problème :*

Effectuer un tirage consiste à extraire simultanément deux boules de l'urne;
On fait l'hypothèse d'équiprobabilité à chaque tirage.

Première partie

Soit la fonction $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\dfrac{14x^2 + 4}{5}} \end{array} \right.$

1° Étudier la parité de f.

2° Déterminer les équations des deux asymptotes obliques à la courbe (C) représentative de f et étudier la position de la courbe par rapport à chacune de ses asymptotes.

3° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (*unité :* 2 cm).

4° Soit la fonction $G \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{2}\sqrt{7x^2 + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left(x\sqrt{7} + \sqrt{7x^2 + 2}\right) \end{array} \right.$

a. Déterminer le domaine de définition de G et calculer la fonction dérivée de la fonction G.

b. En déduire une primitive de la fonction f.

Deuxième partie

I. 1° Deux joueurs A et B sont en présence.

Une urne contient 6 boules; k boules sont noires ($2 \leqslant k \leqslant 4$) et les autres sont blanches.

Le joueur A extrait simultanément deux boules de l'urne.

a. Calculer, en fonction de k, la probabilité qu'il tire deux boules noires.

b. Le joueur B lance deux fois de suite un dé parfaitement équilibré, les deux épreuves étant indépendantes.

Calculer la probabilité que B obtienne deux nombres dont le produit est supérieur ou égal à 9.

2° A et B conviennent de jouer de la manière suivante :

A extrait deux boules de l'urne. S'il obtient deux boules noires il gagne et la partie cesse.

Dans tous les autres cas, B lance deux fois le dé. S'il obtient deux nombres dont le produit est supérieur ou égal à 9 il gagne et le jeu cesse. Dans le cas contraire, le tour revient au joueur A dans les conditions identiques à son premier essai, les boules tirées à chaque essai étant remises dans l'urne.

a. Calculer, en fonction de k, les probabilités p_1, p_2 et p_3 que le joueur A gagne à son premier, deuxième ou troisième essai.

b. Calculer, en fonction de k et de n, la probabilité p_n que le joueur A gagne à son n-ième essai.

c. Calculer, en fonction de k et de n, la probabilité S_n que le joueur A gagne à l'un quelconque de ses n premiers essais.

d. On suppose que $k = 4$.

Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n > 0{,}54$.

II. L'urne contenant quatre boules noires et deux boules blanches, le joueur A participe maintenant au jeu suivant :

— si, à son premier essai, il tire deux boules noires il perd x francs ($x \geqslant 0$);
— si, à son premier essai, il tire deux boules blanches il gagne $6x$ francs;
— si, à son premier essai, il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage après avoir remis dans l'urne les boules tirées.

A l'issue de ce second tirage il gagne a francs s'il tire deux boules noires. Dans les autres cas la partie cesse et il perd 1 franc.

On désigne par Y la variable aléatoire dont les valeurs sont égales aux gains (positifs ou négatifs) du joueur A.

1° Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

2° Calculer, en fonction de a, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y et déterminer a pour que le jeu soit mathématiquement équitable.

3° a ayant la valeur obtenue à la question précédente, calculer, en fonction de x, l'écart type $\sigma(Y)$ de la variable aléatoire Y.

4° En utilisant la courbe (C) de la première partie, déterminer GRAPHIQUEMENT l'entier naturel x pour que l'écart type σ (Y) soit compris entre 3 et 4.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail